# 요소분할

이 단계에서는 해석 영역을 여러 개의 유한요소로 나누게 된다. 요소의 형상에는 특별한 제한이 없으나 일반적으로 많이 사용하는 요소에는 그림1에서 보인 것과 같이 1차원에서는 선요소, 2차원에서는 삼각형 혹은 사각형 요소, 3차원에서는 삼각뿔 혹은 육면체 요소가 있다. 그림에서 나타낸 요소들의 정점을 절점(node)라고 부르며 요소와 절점은 식별이 가능하도록 고유번호를 가지게 된다.

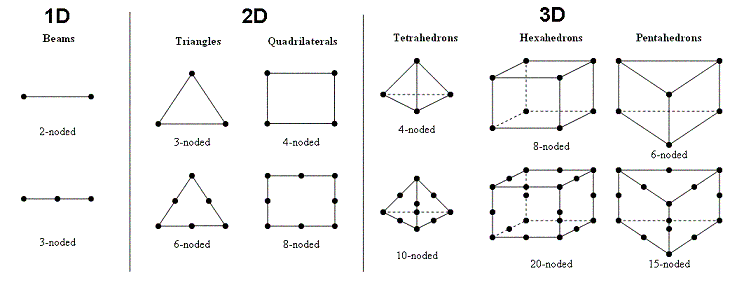
[](http://stochasticandlagrangian.blogspot.com/2011/07/what-does-shape-function-mean-in-finite.html)

Figure 1 Different types of finite elements

특히 절점의 고유 번호는 임의의 한 요소 내에서의 고유 번호와 전체 영역에서의 고유 번호가 있을 수 있으며, 이들간의 관계를 테이블로 표현 가능하다. 아래 그림은 전체 영역에서의 절점 번호 넘버링과 임의 요소 내에서의 절점 번호 넘버링을 보여주고 있다.



Figure 2 Element and node numbering for a 4-element model

# 근사함수와 형상함수

1차원 장에서 우리가 풀고자 하는 문제의 해가 라 하자. 유한요소법의 목적은 근사 해인 를 찾는 것이다. 이번 단계는 각 요소에 대한 해를 근사하기 위해 방정식을 꾸미는 것으로서 ,  사이에 정의된 임의의 요소 내에 있는 임의의 점 에서 함수 값 를 구하는 단계이다. 이 단계는 또 다시 두 단계로 나누어 볼수 있는데, 첫번째 단계는 각 요소에 대해 해를 근사하기 위해 쓰일 미지의 계수들로 구성된 적당한 함수를 찾는 일이고 두번째 단계는 최적화된 해를 얻기 위해 위에서 찾은 함수의 계수를 평가하는 것이다.



## 1차원장

### 1차근사함수 - 글로벌 좌표계

근사함수로는 주로 수학적으로 조작이 쉬운 다항식을 쓰게 된다. 1차원의 경우 가장 간단한 근사함수는 1차 다항식인 식(2.1)과 같다

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

여기서 [[1]](#footnote-1)

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2.2) |

,은 상수이며 는 독립변수이다. 이 함수는 요소의 양 끝점인 ,에서 항상 만족해야 하므로

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3) |

위 수식을 행렬 형태로 표시하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (2.5) |

식(2.4)에서 를 구하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6) |

이제 식(2.6)을 식(2.1)에 대입하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7) |

식(2.7)는 다음과 같이 써 볼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.8) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.9) |

식(2.8)을 식(2.9)를 이용해 풀어 쓰면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.10) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.11) |

식(2.10)의 를 **보간함수**(Interpolation Function)라 하고, 식(2.11) , 를 **형상함수**(Shape Function)라 하고 한다. 또한 는 **차원**과 다항식의 **차수**에 따라 달라지는 형상함수 벡터이다. 보간함수와 형상함수는 식(2.10)의 꼴로 각 요소에 대해 정의된다. 요약해보면, 요소 내의 임의 점에서 함수 값은 보간을 통해 알아내며 이때 절점에서의 함수값과 형상함수를 이용하게 된다.

### 1차근사함수 – 로컬 좌표계

이제 식(2.11)을 조금 더 자세히 관찰해 보도록 한다. 식(2.11)의 형상함수는 의 좌표에 따라 달라지는데, 이를 새로운 좌표계를 사용해 정규화 시키면 추후 면적 적분을 비롯한 많은 계산과정에서 장점이 생긴다. 여기서 기존의 좌표계를 **글로벌 좌표계(Global Coordinate System)**, 정규화된 새로운 좌표계를 **로컬 좌표계(Local Coordinate System)**라 부른다. 글로벌 좌표계에서의 절점은 로 표현되며 총  개의 절점이 존재하게 된다. 로컬 좌표계는 통상 Natural 혹은 Intrinsic 좌표계로 불리며, 하나의 요소를 정규화 된 형식으로 표현하기 위해 사용되며  에 의해 표시된다.

예를 들어 Figure 3와 같이 1차원의 문제에 있어 양 끝 두 절점으로 이루어진 1차 요소의 경우를 고려해 보자. 그림에서 축 상에서 나뉘어진 7개의 요소 중 3번째 요소는 절점 3번과 4번에 의해 구성되며 절점3의 좌표는 이며, 절점4의 좌표는 이다. 이때 적절한 변환을 통해  좌표계를  좌표계로 바꾼 경우  좌표계상의  과  를  좌표계에서 0과 1로 변환할 수 있다.  좌표계에서 요소는  하나만 존재하게 되며 를 이루는 절점의 번호는 1과 2가 된다.



Figure 3 Global coordinate system and Local coordinate system

이제 로컬 좌표계에서 식(2.1)~식(2.11) 과정을 거쳐 형상함수를 도출하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.12) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.13) |

이는 식(2.11)에서  대신 ,  대신 0,  대신 1의 값을 넣어주는 것과 같다.

또한 보간함수인 식(2.10)은 로컬좌표계 상에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.14) |

식(2.14)는 Figure 3와 같이 정규화 된  좌표계를 이용하므로 모든 요소에 있어 동일하게 적용된다. 결국 로컬 좌표계 상의 임의 점  에서의 함수값(해) 는 요소를 이루고 있는 두 절점(로컬 좌표계 상에서 절점 번호 1, 2)에서의 함수값 , 과 **선형 보간 형상 함수**  과 를 이용해 구해질 수 있으며, 모든 요소에 대해 동일한 방법을 적용하면 전체 영역에 대한 해를 보간 할 수 있게 된다.

### 로컬 좌표계의 글로 벌좌표계 변환 - 1차 근사

이제 로컬 좌표계와 글로벌 좌표계 사이의 변환식을 알아보기 보도록 하자.



Figure 4 Coordinates transform function with 1st order polynomial

Figure 4와 같이 는  과 을 지나는 직선이 되어야 하므로,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.15) |

으로 정의할 수 있다.

특별히 식(2.15)의 로컬 좌표계에서 글로벌 좌표계로의 변환은 다음과 같이 로컬 좌표계의 형상 함수와 글로벌 좌표계의 절점 좌표를 사용해 행렬 형태로 표현 가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.16) |

이와 같이 함수의 로컬 좌표계에서의 보간과 로컬좌표계에서 글로벌 좌표계로의 좌표변환에서 동일한 형상함수를 쓰는 경우 ***isoparametric*** 이라 한다.

식(2.12)의 형상함수를 로컬 좌표계에서 그려보면 Figure 5와 같다. 의 경우 절점1에서 1이고 절점2에서 0의 값을 갖는다. 반대로 의 경우 절점1에서 0이고 절점 2에서 1의 값을 갖는다.



Figure 5 Variation of Shape Functions along  in case of 

또한

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.17) |

의 특징을 갖는다.

Figure 3에서 글로벌 좌표계에서의 특정 요소를 0~1에서 정의되는 로컬 좌표계로 변환 하였는데, 변환 되는 값의 범위가 꼭 0~1일 필요는 없다. 만약 -1~1로 변환 한다면 로컬 좌표계에서 원점은 글로벌 좌표계에서 과 의 중심(즉 두 값의 평균)이 원점이 될 것이며, 식(2.15)는 다음과 같이 정의되어야 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.18) |

또한 로컬 좌표계에서 형상함수는 식(2.11)에서 , , 대신 , -1, 1을 대입하면 다음과 같이 표현된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.19) |

식(2.19)의 형상함수는 Figure 6와 같다.



Figure 6 Variation of Shape Functions along  in case of 

식(2.18) 또한 식(2.15)와 마찬가지로 형상함수로 표현가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.20) |

### 형상함수의 미분 - 1차 근사

여기서 잠깐 요소의 보간 함수  와 식(2.19)의 형상함수  및 의  와 에 대한 미분을 살펴보면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.21) |
|  | (2.22) |
|  | (2.23) |
|  | (2.24) |

### 2차근사함수 – 글로벌 좌표계

지금까지는 식(2.1)~식(2.11)의 과정을 통해 **1차원장**에 대해 **1차 다항식**을 통한 보간함수 및 형상함수를 구하는 과정을 보였다. 이를 확장하여 2차 다항식을 이용한 보간함수 및 형상함수를 구해 볼 수도 있다. 2차 다항식을 이용하기 위해서 요소는 3개의 절점으로 이루어져야 한다. 이제 1차원 요소 가 절점1 및 절점3 그리고 절점1과 절점3 사이에 존재하는 절점2에 의해 구성된다고 하자. 이때 절점1, 2, 3에서의 좌표는 , , 이다.

요소에서의 보간함수를 2차 다항식으로 쓰면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.25) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2.26) |

이 함수는 요소를 이루는 절점인 , ,  에서 항상 만족해야 하므로

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.27) |

식(2.27)을 식(2.4)와 같이  형태로 표현할 수 있으며 이때

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2.28) |

식(2.9)를 이용해 형상함수를 구하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.29) |

여기서  으로  행렬의 행렬식이다.

식(2.25)를 식(2.29)를 사용해 다시 쓰면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.30) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.31) |
|  | (2.32) |
|  | (2.33) |

식(2.29)를 푸는 과정은 매우 시간 소모적이며 차수가 높아지게 되면 더욱 많은 시간이 걸리게 된다. 대신 식(2.34)로 정의되는 *라그랑지안 보간법*(Lagrangian interpolation method)을 사용하면 형상함수를 보다 쉽게 찾을 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.34) |

여기서 은 보간 차수이며  는 절점의 좌표이다.

, , 로 구성된 1차원 2차 보간함수의 경우 식(2.34)를 이용하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.35) |
|  | (2.36) |
|  | (2.37) |

으로 식(2.31)~(2.33) 와 동일함을 알 수 있다.

### 2차근사함수 – 글로벌 좌표계

로컬 좌표계 상의 형상함수는 식(2.31)~(2.33)에서 , , ,  대신 , -1, 0, 1을 대입하면 다음과 같이 구해진다. 이때 로컬좌표계의 정의역은 -1≤≤1 이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.38) |
|  | (2.39) |
|  | (2.40) |

식(2.38)~(2.40)의 형상함수는 Figure 7과 같다.



Figure 7 Variation of the Shape functions for 2nd order polynomial approximation

의 경우 절점1인 에서 1의 값을 가지며 절점2와 절점3인 과 에서는 0의 값을 가진다. 즉 자신의 노드에서만 1의 값을 가지며 나머지 노드에서는 0의 값을 가진다. ,  또한 동일한 특징을 가진다. 또한 세 형상함수의 합은 항상 1의 값을 가진다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.41) |

### 로컬 좌표계의 글로벌 좌표계 변환 - 2차 근사

이제 식(2.35)~(2.37)의 글로벌 좌표계 상의 형상함수를 로컬 좌표계로 변환하는 것을 생각해 보자. 로컬 좌표계 변환은 요소의 좌표를 정규화 하는데 목적이 있다. 이에 따라 1차 다항식에서 절점1과 2가 로컬 좌표계 상의 0과 1 혹은 -1과 1로 대응되었던 것처럼 2차 다항식에서는 절점1, 2, 3이 로컬 좌표계의 -1, 0, 1 로 대응되도록 Figure 8과 같이 생각해 볼 수 있다.



Figure 8 Coordinates transform function with 2nd order polynomial

그림에서  는 세 절점 , , 를 통과하는 곡선이 되어야 한다. 이상의 조건을 만족하는 곡선을 표현하는 방법은 많이 있을 수 있지만, 가장 간단한 방법으로 다항식을 이용해 볼 수 있다

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.42) |

행렬 형태로 표현하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.43) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.44) |

식(2.42)는 위의 세 점을 통과해야 하므로

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.45) |

행렬형태로 표현하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.46) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.47) |

미지의 항 는 이며, 이를 식(32)에 대입하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.48) |

식(2.48)은 식(2.15)에서와 유사하게 다음과 같이 로컬좌표계의 형상함수들과 글로벌 좌표계상의 절점 값의 곱으로 표현가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.49) |

## 2차원장

### 1차 근사함수 – 글로벌 좌표계

지금까지는 1차원 요소에 대한 근사 및 보간함수에 대해 살펴보았다. 이제 2차원에 대해 살펴보자. 우선 2차원 요소 중 가장 간단한 형태인 삼각형 요소에 대해 살펴보도록 한다.



Figure 9 First order two-dimensional triangular elements

Figure 9에서 요소 에서의 근사해를 라고 하자. 1차원장에서와 마찬가지로 다항식을 이용해 근사해를 표현할 수 있으며 이때 가장 간단한 식은 1차 다항식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.50) |

행렬 형태로 표현하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.51) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.52) |

식(2.52)는 요소를 이루는 세 절점 1, 2, 3에서 만족해야 하므로,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.53) |

이를 행렬 형태로 쓰면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.54) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2.55) |

식(2.54)를 풀면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.56) |

식(2.56)를 식(2.51)에 대입하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.57) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.58) |

행렬식은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.59) |

식(2.59)은 삼각형 요소의 면적의 2배이다.

1차원장에서와 마찬가지로 식(2.57)의 를 형상함수 이라고 한다. 형상함수를 구하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.60) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
| , i, j, k는 1,2,3으로 순환하는 수 | (2.61) |

식(2.60)에서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.62) |

즉, 형상함수는 자신의 절점에서만 1의 값을 갖고 나머지 절점에서는 0의 값을 갖는다. 또한 세 형상함수의 합은 항상 1이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.63) |

형상함수를 이용하여 근사해인 식(2.57)을 다시쓰면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.64) |

### 1차 근사함수 – 로컬 좌표계

이제 1차원장에서와 마찬가지로 로컬 좌표계에 대해서 살펴보자. 로컬 좌표계의 목적은 요소의 형상을 정규화하여 표현하는데 있다. 삼각형 요소의 경우는 Figure 10과 같이 글로벌 좌표계의 절점1, 절점2, 절점3이 로컬 좌표계의 절점1, 절점2, 절점3로 맵핑 되도록 생각해 볼 수 있다. 이때 로컬 좌표계는 와 로 나타내기로 한다.



Figure 10 Coordinates transform function with 1st order polynomial in 2D

식(2.50)~식(2.60)의 과정을 거쳐 로컬 좌표계 상의 형상함수를 구하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.65) |
|  | (2.66) |
|  | (2.67) |

이에 따라 로컬 좌표계 상의 근사해는

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.68) |

### 로컬 좌표계의 글로벌 좌표계 변환 - 1차 근사

글로벌 좌표는 로컬 좌표로부터 얻어지며 1차 선형인 경우 다음과 같이 써 볼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.69) |
|  | (2.70) |

행렬로 나타내면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.71) |
|  | (2.72) |

위 식에서 로컬 좌표 ,,에 대한 글로벌 좌표로의 변환값이 ,,이므로

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.73) |
|  | (2.74) |

역행렬을 취하여 식(2.73) 및 식(2.74)의 미지항 벡터를 구하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.75) |
|  | (2.76) |

식(2.75) 및 식(2.76)를을 식(2.71) 및 식(2.72)에 대입하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.77) |
|  | (2.78) |

행렬 형태로 다시 쓰면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.79) |
|  | (2.80) |

이때,



이상의 식으로 로컬 좌표계의 어떠한 점도 글로벌 좌표계의 점으로 매핑된다.

### 2차 근사함수 – 로컬좌표계

이제 2차 다항식을 이용한 보간법에 대해서 알아보자. 편의를 위해 로컬좌표계에서 형상함수를 먼저 도출한 다음 글로벌 좌표계로 매핑할 것이다. 2차 다항식을 위해서는 총 6개의 절점이 필요하며 Figure 11과 같이 절점 번호를 부여하였다.



Figure 11 2nd order triangle element in local coordination system

2차 다항식을 이용한 해를 써 보면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.81) |

이를 행렬 형태로 표현하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.82) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.83) |

위 식은 6개의 절점에서 만족해야 하므로

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.84) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.85) |

식(2.84)에서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.86) |

식(2.86)를 식(2.82)에 대입하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.87) |

여기서 는 로컬 좌표계 상의 형상함수이며 계산을 하면 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.88) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.89) |

따라서 식(2.81)는

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.90) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.91) |
|  | (2.92) |
|  | (2.93) |
|  | (2.94) |
|  | (2.95) |
|  | (2.96) |

### 로컬 좌표계의 글로벌 좌표계 변환 - 2차 근사

이제 로컬 좌표계에서 글로벌 좌표계로의 변환에 대해서 살펴보자. 식(2.69) 및 식(2.70)와 비슷하게

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.97) |
|  | (2.98) |

식(2.71)~(2.78)의 과정을 따라 접근을 하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.99) |
|  | (2.100) |

### 미분 – 자코비안

실제 문제에 있어서는 단순 포텐셜 뿐만 아니라 , 와 같은 물리량을 계산해야 할 필요가 있다. 이러한 미분값은 글로벌 좌표계상에서 직접 미분하여 구할 수도 있지만, 의 근사식 차수가 높게 되면 계산량이 크게 늘어나게 된다. 따라서 일반적으로는 로컬 좌표계상에서 자코비안 을 구하여 이를 글로벌 좌표계로 변환하는 방법을 많이 쓰게 된다. 미분의 체인룰을 이용하면 글로벌 좌표계의 미분을 로컬좌표게의 미분으로 변환하는 수식은 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.101) |

여기서 식(2.101)의 정방행렬을 자코비안  이라 한다.

이제 글로벌 좌표계에서 로컬좌표계로의 변환식 (2.97)~(2.98)을 이용하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.102) |

결국

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.103) |

자코비안은 추후 미분과 적분 시 아주 유용한 툴로 쓰일 것이다. 특히 면적분

### 수치 적분

추후 유한요소해석을 위해 정식화과정을 거쳐야 하는데, 정식화 방법에는 많은 이론들이 있지만 가중잔차법 중 겔러킨법을 많이 적용하고 있다. 겔러킨법을 적용하기 위해서는 잔차를 영역적분하여 0으로 만들어야 하는데, 이때 적분이 필요해진다. 헌데 근사함수가 복잡해지면 적분은 매우 복잡해지게 된다. 그래서 사용할 수 있는 것이 Gauss-Legendre 적분이다. 이는 적분을 특정지점 값의 합으로 계산해 주는 것이며 근사함수의 차수에 따라 적분 포인트와 포인트에서의 가중값이 존재한다. 이는 근사해가 아닌 정해이며 수치적분시 매우 유용하다.



위 수식에서 은 적분 포인트의 갯수이며,  는 해당 포인트에서의 가중값이다.

다음 표는 수치적분을 위한 포인트와 가중값을 나타낸다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Order m | Interation Points | ui | vi | wi |
| 1 | 1 | 1/3 | 1/3 | 1/2 |
| 2 | 3 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| 2/3 | 1/6 | 1/6 |
| 1/3 | 2/3 | 1/6 |
| 5 | 7 | 1/3 | 1/3 | 9/80 |
| a | a | 0.066197076 |
| 1-2a | a | 0.066197076 |
| a | 1-2a | 0.066197076 |
| b | b | 0.062969509 |
| 1-2b | b | 0.062969509 |
| b | 1-2b | 0.062969509 |

a=0.470142064, b=0.101286507

- Joao Pedro A. Bastos, “Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods”, pp.166~175 참고

요약하자면, 적분을 써메이션으로 대체할 수 있다는 내용. 2차식 이상의 복잡한 수식을 적분하는데 유용하게 작용함. “Gauss-Legendre Integration”이라 불림

# 유한요소 정식화

## 2차원장 지배방정식

전자장을 지배하는 방정식은 Maxwell 방정식으로 알려진 4가지 방정식으로 표현된다. Maxwell 방정식은 미분형 표현과 적분형 표현이 가능하며 아래 수식은 미분형으로 표현한 Maxwell 방정식이다.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 페러데이 법칙 | (3.1) |
| 1. 암페어의 주회 법칙 | (3.2) |
| 1. 가우스 법칙 | (3.3) |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 자속의 연속식 | (3.4) |

여기서,

는 자계의 세기, [ampere/meter]

는 자속밀도, [tesla]

는 전속밀도, [coulomb/meter2]

는 전계의 세기, [volt/meter]

는 전류밀도, [ampere/meter2]

는 속도, [meter/second]

는 전하, [coulomb/meter3]

이다.

또한 위의 4가지 방정식을 서로 연결하기 위한 보조식은 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.5) |
|  | (3.6) |
|  | (3.7) |

여기서 은 유전율, 는 투자율, 그리고 는 도전율이다. , , 는 재질에 따른 물질 상수이며 이방성재질의 경우 텐서로 표현되며 특히 의 경우는 비선형적인 특징을 갖는다.

이제 식(3.1)~식(3.4) 의 미분형 방정식을 적분형 방정식으로 써 보도록 한다. 적분은 Figure 12와 같이 열린 폐곡면 와 이의 경계 에 대해 적용하도록 한다.



Figure 12 The surface S and contour C for the integral form of Maxwell’s equations.

먼저 식(3.1)의 페러데이 법칙과 식(3.2)의 암페어의 주회법칙을 적분형으로 쓰기 위해 양 변을 경계면에 대해 적분한후 스톡스 정리를 적용하면,

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 페러데이 법칙 | (3.8) |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 암페어의 주회 법칙 | (3.9) |

식(3.3)의 가우스법칙과 식(3.4)의 자속의 연속식에 폐곡면 로 둘러싸인 는 적분영역(부피)에 대해 적분을 취한 후 발산정리를 적용하면,

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 가우스 법칙 | (3.10) |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 자속의 연속식 | (3.11) |

식(3.10) 이 의미하는 바는 닫힌 폐곡면 를 지나는 전속밀도 의 총 합은 폐곡면 내의 전하량과 같다는 의미이며, 식(3.11)이 의미하는 바는 폐곡면 를 지나는 자속밀도 의 총 합은 0임을 의미한다.

이제 이상의 Maxwell 방정식을 기반으로 유한요소 해석을 위한 정식화를 시도한다. 전류원소스가 존재하는 전자장 해석을 위해서는 유한요소 정식화를 자기스칼라포텐셜 을 이용할 수 없기 때문에 자기벡터포텐셜 을 사용한 정식화가 필요하다. 자기벡터포텐셜 와 자속밀도 의 관계는 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.12) |

식(3.2)에서 변위전류인 항을 무시하면, (이는 의 시간에 따른 변화량이 무시할 만큼 작은 값인 경우이다. 저주파 자계 해석에서는 전하에 의한 전계효과는 무시한다)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.13) |

식(3.13)에서 전류밀도 는 외부 전류원에 의한 항 , 시변자계에 의해 유도된 유기기전력에 의한 항 로 구분해 볼 수 있다.

유도기전력에 의한 소스항인 를 구하기 위해 식(3.1)의 양변을 적분하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.14) |

스톡스정리에 의해

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.15) |

즉,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.16) |

전계와 전류밀도의 상관관계식을 이용하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.17) |

결국 식(3.2)은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.18) |

경자성 재료를 고려하게 되면 자속밀도와 자계의 상관식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.19) |

여기서 은 자화(잔류자속밀도)이다.

식(3.12)와 식(3.19)에서 을 식(3.18)에 대입하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.20) |

식(3.20)에서 이방성 재질을 고려하면 재질의 투자율을 텐서로 표현해야 하며 식(3.20)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.21) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.22) |

이제 식(3.21)에 대하여 2차원 장 문제를 고려해 보자. 2차원 장의 경우 벡터포텐셜 와 전류밀도 는 z축 성분만 존재한다고 가정하며, 자속밀도 , 자화 , 속도 는 x, y 성분만 존재한다고 가정한다. 또한 이상의 물리량은 행렬 표현 시 2x1 크기의 **열벡터**로 가정한다(3차원 문제의 경우는 3x1 크기의 열벡터로 가정). 따라서 식(3.21)의 첫번째 항은 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.23) |

여기서 는 벡터포텐셜의 z축 성분이며 스칼라 값이다. 위 식은 다음과 같이 표현 가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.24) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.25) |

식(3.21)의 두번째 항은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.26) |

여기서 는 전류밀도의 z축 성분이며 스칼라 값이다.

식(3.21)의 세번째 항은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.27) |

식(3.21)의 네번째 항은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.28) |

따라서 식(3.21)는 모두 방향 성분만 존재하므로 다음과 같이 써 볼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.29) |

## 가중잔차법 - 겔러킨법

겔러킨법은 가중잔차법의 일종으로 가중잔차법에 대해 우선 설명한다. 다음과 같이 경계 를 가지는 영역 에서 정의된 방정식이 있다고 가정하자.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.30) |

경계조건으로

|  |  |
| --- | --- |
| at | (3.31) |
| at | (3.32) |

여기서 는 계의 분포 스칼라 함수라 하며 식(3.30)의 해이다. 이때 식(3.30)의 해를 다음과 같이 개의 미정계수 를 포함하는 선형 결합 함수로 근사 시켜 근사해를 만든다고 하자.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.33) |

이상의 근사해는 영역  내에서는 근사함수이지만 경계상에서는 식(3.31) 및 식(3.32)의 경계조건을 만족하는 함수이다. 즉,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.34) |
| at | (3.35) |
| at | (3.36) |

이때 식(3.34)의 을 근사 함수 에 의한 영역 잔차(residual) 라 한다. 근사 함수가 진해 에 접근하도록 하기 위해서는 식(3.34)의 영역 잔차 을  전 영역에 대해 적분하여 그 결과가 최소가 되게 하는 것이 요구된다.

|  |  |
| --- | --- |
| = 최소 | (3.37) |

여기서 가중 함수(Weighting function)를 도입하여, 이 가중 함수를 잔차 에 곱하여 영역 오차의 크기를 가중시켜 전 영역에 분포시키고, 이를 전 영역에 대해 적분한 결과가 0이 되기 위하여 가중 잔차에 대한 오차 평가를 수행하는 방법을 가중 잔차법이라 한다.

지금 가중 함수를 라 하면 가중잔차법의 일반식은 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.38) |

이와 같은 영역적분방정식을 가중 잔차법 기본 방정식이라 한다.

한편 가중잔차법은 가중 함수 의 선택 방법에 따라 선점법(Collocation method), 최소자승법(Least square method), 모멘트법(moment method), 겔러킨법(Galerkin method) 등으로 분류되며, 를 전 절에서 구한 형상함수 으로 선택하면 겔러킨법이 된다.

## Maxwell 방정식의 유한요소 정식화

이제 식(3.29)에 가중잔차법을 적용하여 정식화를 유도하도록 한다. 이때 해석 영역은 이며, 이는 고정경계면 과(In Homogeneous Dirichlet Condition), 자연경계면 (Homogeneous Neumann Condition)로 이뤄져 있다 가정한다. 벡터포텐셜 의 근사식을 라하고 식(3.29)에 가중잔차법을 적용하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.39) |

식(3.39)의 좌변 다섯번째 항은 고정경계조건에 의한 적분항이며 여섯번째 항은 자연경계에 의한 적분항이다. 참고로 은 이며 는 와 동일하다. 경계 상에서 은 식(3.36)의 Neumann Condition 이다.

이제 식(3.39)의 좌변 첫번째 항과 경계조건 관련 항을 묶어 다음과 같이 고려해 보자.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.40) |

이제 벡터공식을 적용하여 식(3.40)를 ‘**weak form**’으로 나타내 볼 것이다. ‘weak form’이란 2계 미분방정식을 1계 미분 방정식으로 표현하여 더욱 ‘weaker’ 한 방정식이란 의미이며 수치해석적으로 다루기 편한 방정식이다. 다음과 같은 벡터공식을 고려해 보자.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.41) |

위 식을 체적 적분하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.42) |

발산정리를 적용하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.43) |

위식에서  대신 ,  대신 을 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.44) |

따라서 식(3.40)은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.45) |

이제 위 식에서 에 있어, 자연경계 에서의 가중함수 를 로 정하고, 고정경계 에서의 가중함수 를 0으로 취하고[[2]](#footnote-2) 로 두면 경계에서의 적분은 0이 된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.46) |

즉, 식(3.39)는 다음과 같은 weak form으로 쓸 수 있게 된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.47) |

이제 식(3.47)을 실제로 풀어보도록 한다. 우선 **①첫번째 항**에 대해 살펴보자. 당장 을 어떻게 구하면 될지 고민이 필요하다. 지금까지는 가중함수 를 좌표와 관련된 하나의 함수로 가정하여 수식을 전개 하였다. 겔러킨법 적용을 위해서는 를 형상함수로 선택하면 되는데, 형상함수는 하나가 아니다! 형상함수는 요소 형상 및 차수에 따라 요소의 절점 개수 n만큼 존재하게 된다. 따라서 여기서는 형상함수를 1xn 크기의 **행벡터**(공간의 차원과는 무관함)로 고려하도록 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.48) |

### 1차원 요소

1차 삼각형 요소를 고려하게 되면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.49) |

일반적으로 식(3.49)은 2차원 장에서 2xn 행렬로 나타낼 수 있다. 이때 2는 2차원 공간을 고려한 차원의 수이며, n은 요소의 타입에 따른 형상함수의 개수(절점의 개수)다. 다시 한번 정리하면, 우리는 물리량의 공간 분포를 벡터 형태로 표현하고 있으며 동시에 형상함수 또한 벡터형태로 표현하고 있다. 이 둘을 분리해서 생각해야하며 앞서 언급한 바와 같이 공간함수는 열벡터, 형상함수는 행벡터로 표현한다. 즉 식(3.49)에서 바깥[]는 삼각형 선형 요소를 고려한 3개의 항을 갖는 행벡터이며, 내부의 []는 2차원 공간을 표현한 2개의 항을 갖는 열벡터이다.

이제 식(3.47)좌변 적분항의 를 근사함수를 이용해 구해보자. 포텐셜 는 근사 차수에 따라 달라질 것이다. 2차원 요소 중 가장 간단한 요소인 1차 삼각형 요소를 고려하게 되면 근사함수는 앞서 살펴본 것과 같이 다음과 같이 표현된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.50) |

따라서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.51) |

는 2x1 의 크기를 갖는 행렬이며, 는 2x3의 크기를 갖는 행렬이다. 식(3.47) 좌변 첫번째항의 벡터 내적이 가능하기 위해서는 두 행렬의 내적이 가능하기 위해서는 식(3.47) 좌변 첫번째 항이 아래와 같이 행렬의 내적처럼 연산 되어야 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.52) |

|  |
| --- |
| 참고) 행렬내적 = [행벡터][열벡터] |

결국 식(3.52)의 공간벡터의 내적은 다음과 같이 행렬의 내적으로 다시 써 볼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.53) |

여기서 은 축방향 길이이며, 부피적분에 있어 형상함수는 xy평면에 대한 함수이므로 면적분 후 z축 방향 길이를 곱해주어도 된다.

이제 식(3.47) ②두번째 항에 대해 살펴보도록 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.54) |

1차원 삼각형 요소의 형상함수의 경우 해당 절점에서만 1의 값을 가지고 나머지 절점에서는 0의 값을 가진다. 가 공간 위치에 따른 변수가 아닌 경우 위 적분은 높이가 1인 피라미드의 부피를 구하는 것과 같다. 따라서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.55) |

식(3.47) ③세번째 항에 대해 살펴보도록 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.56) |

식(3.56)의 우변 첫번째 항에 대한 적분을 다시 써 보면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.57) |

식(3.50)의 근사함수와 시간 차분을 이용하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.58) |

식(3.58)의 적분을 직접적으로 하기는 쉽지 않다. 전절에서 살펴본 로컬좌표계를 이용하면 적분이 쉬워진다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.59) |

따라서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.60) |

식(3.56)의 우변 두번째 항에 대한 적분을 다시 써 보면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.61) |

위식은 다음과 같이 써 볼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.62) |

비슷한 방법으로 식(3.56)의 우변 세번째 항은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.63) |

식(3.47) ④네번째 항에 대해 살펴보도록 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.64) |

만약  라 두면, 식(3.64) 적분 내의 괄호식은 다음과 같이 의 발산으로 나타낼 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.65) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.66) |

따라서 식(3.64)는

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.67) |

식(3.41)를 이용하면 식(3.67)우변 괄호식은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.68) |

따라서 식(3.67)은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.69) |

발산정리를 적용하면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.70) |

식(3.70)의 첫번째 항의 적분의 물리적 의미를 살펴보자. 적분 영역은 경계면이 되며, 경계면에는 고정경계면과 자연경계면이 있다. 만약  으로 고정경계상에 존재한다면, 가중함수 이 되어 첫번째 적분값은 0된다. 만약 의 자연경계라면, 첫번째 항의 적분은 값은 0이 아니며 추후에 소스항으로 작용하게 된다[[3]](#footnote-3). 이에 대한 자세한 결과는 적지 않는다. 결국 식(3.70)은,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.71) |

이제 겔러킨법에 의해 정식화 된 최종 수식을 정리해 보면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

식(3.53), 식(3.55), 식(3.60), 식(3.62), 식(3.63), 그리고 식(3.71)을 종합하면, 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.72) |

여기서  식(3.60)에서 표시한 를 제외한 모든 에 해당하며, 시간 에서의 벡터포텐셜 값의 벡터를 의미한다.  는 소스항과 관련되며, 인가된 전류 , 전 스텝에서 유기된 전류, 그리고 영구자석에 의한 소스텀을 포함한다. 행렬은 와 관련된 항으로,

### 2차원 요소

2차 다항식을 사용한 2차 삼각형 요소를 사용하여 근사를 하는 경우 식(3.47)의 적분은 쉽지 않다. 적분을 쉽게 하기 위해서는 2장에서 언급된 로컬좌표계와 자코비안을 사용한 적분이 용이하다.

## 비선형 문제

투자율이 선형이 아닌 경우 어떻게 풀 것이냐? Newton-Raphson 법을 적용해 문제를 풀 것이다. 통상 풀고자 하는 방정식은 아래와 같이 표현된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.73) |

는 계수행렬,  는 벡터포텐셜, 은 소스항이다.

비선형 해석을 할 때는 계수행렬이 상기 선형방정식의 해인 벡터포텐셜에 의존하게 된다. 따라서 반복을 통하여 해를 수렴해야 한다.

스탭(k)와 스텝(k+1)에서의 해는 다음과 같이 표현 가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.74) |

여기서  오차 벡터라 하며, 오차벡터는 반복을 멈추기 위한 잣대로 사용된다. 위 선형대수식을 다차원 Taylor 급수로 표현하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.75) |

2차 미분항 이상을 무시하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.76) |

결국

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.77) |

따라서 오차벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.78) |

Newton-Raphson 법은 최초에 해( )를 가정하고 식(3.78)을 풀어 해의 증분을 구한 다음, 식(3.74)을 이용해 새로운 해를 구하게 된다. 이제부터 반복을 하게 되는데, 새롭게 구한 해로 식(3.78)을 풀어 새로운 증분을 얻고, 다시 새로운 해를 구하게 되는 과정이다.

오차벡터를 구하기위해서는 즉,  을 구해야 한다. 오차벡터가 구해지면 다음번 반복

이제 우리가 풀고자 하는 문제에 NR법을 적용해 보자. 우리가 풀고자 하는 방정식은 다음과 같다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.79) |

문제가 복잡해 보이니, 소스항을 무시한 수식을 고려해 보자.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.80) |

Gallerkin 법을 가정하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.81) |

이방성 재질을 고려하기 위해 투자율 벡터를 x축 성분과 y축 성분으로 나누어 생각해보도록 한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.82) |

따라서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.83) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.84) |

식(3.84)에서 투자율 행렬(텐서)의 1행 1열만 0이 아니므로 식(3.84)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.85) |

의 크기는 nxn이다. 식(3.85)의 2열 성분은 0벡터이므로 1열만 고려해도 동일한 결과를 얻는다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.86) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.87) |
|  | (3.88) |

비슷한 방법으로 y축 성분을 구하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.89) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.90) |
|  | (3.91) |

결국 식(3.81)은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.92) |

여기서

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.93) |

이제, 반복법에 적용하기 위해 의 미분을 구해보자. 는 n행을 가지는 벡터이며 우리는 이를 로 미분해야 한다. 또한 n행을 갖는 벡터이다. 결국 벡터를 벡터로 미분하는 꼴인데, 이는 다음과 같이 표현된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.94) |

식(3.94)의 j열에 대한 미분을 알아보도록 하자. 가 복잡하므로, 앞서 살펴본 바와 같이 x성분과 y성분으로 나누어 알아보도록 한다. 우선 식(3.85)을 다시 써 보면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.95) |

즉,  인 정수 j에 대하여,  의 j번째 행은 다음과 같이 표현가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.96) |

식(3.96) 를 에 대해 미분하면 이는 식(3.94)의 j행 k열 원소가 되며, 다음과 같이 표현 가능하다. 이때 k는 정수이며,  이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.97) |

위 수식에서 는 알기 힘든 값이며, 이를 체인룰을 이용해 다음과 같이 우리가 계산 가능한 값으로 바꾸어 볼 것이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.98) |

는 커브(BH커브로부터 만들어진 커브)로부터 구해질 것이며, 는 구해야 하는 값이다. 결국 자속밀도를 우선적으로 구해야 하며, 이로부터 과 를 구해야한다.

자속밀도 는 벡터포텐셜의 회전이다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.99) |

이제  에 대한  에 대한 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.100) |

결국

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.101) |

따라서 식(3.97)은 다음과 같이 표현 가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.102) |

식(3.102)의 우변 2항의 적분내의 식을 아래와 같이 라고 하자.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.103) |

이를 행렬 형태로 바꾸어 쓰면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.104) |

여기서 와를 다음과 같이 정의하면 식(3.104)는 식(3.106) 과 같이 된다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.105) |
|  | (3.106) |

결국

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.107) |

의 미분에 대해서도 식(3.94) ~(3.107)의 수순을 거쳐 다음과 같이 유도 가능하다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.108) |

결국 식(3.94) 계수행렬의 j,k 원소는

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.109) |

만약 등방성 재질을 고려하게 되면, 식(3.109)에서 투자율의 역수인 의 x와 y의 방향성분은 동일하게 될 것이며 이때 는 자속밀도의 절대값의 크기에따라 달라질 것이다. 비슷하게 와 도 로 바뀌게 될 것이다.

의 번째 성분은,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.110) |

을 구하면,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.111) |

식(3.111)의 우변 두번째항만 고려해 보자

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.112) |

여기서,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.113) |

따라서 식(3.112)는

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.114) |

결국

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.115) |

식 (3.94)의 자코비안을 다시 써 보면

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.115) |

이상의 적분은 Gauss-Legendre 적분을 이용해 구현이 가능하다. 결국 계수행렬은 적분 포인트(좌표)에서의 형상함수 기울기와, 자코비안의 행렬식, 투자율, 그리고 만 알고 있으면 구성이 가능하다.

이제 비선형 문제를 식(3.78)에 의해 다음과 같이 풀 수 있다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.116) |

여기서  은

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.117) |

그리고 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.118) |

1. d는 다항식의 기저(basis) 인데, 이에 대한 자세한 설명을 추가하면 좋을 것 같음 [↑](#footnote-ref-1)
2. 가중함수 W는 겔러킨법에 있어 형상함수가 된다. 그렇다면 본문에서처럼 가중함수를 0으로 취할 수 없다. 본인의 생각에는 고정경계란 경계에 진해를 설정하는 것이고, 이에 따르면 잔차가 발생하지 않는다. 따라서 잔차를 분표시키기 위한 가중함수가 0이 되어도 되지 않나라는 생각을 하였다. [↑](#footnote-ref-2)
3. 실제로 영구자석이 해석 경계면에 존재하는 경우는 드물다. 이러한 경우를 일단 피하자. [↑](#footnote-ref-3)